

Este documento contiene problemas resueltos sobre Continuidad propuestos en exámenes de la asignatura *ANÁLISIS MATEMÁTICO* en los últimos años.

Todas las soluciones han sido redactadas por Julián Aguirre Estibález, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad del País Vasco y Tutor de la asignatura en el Centro Asociado UNED Bizkaia. Cualquier sugerencia o errata puede comunicarse por correo electrónico a la dirección [jaguirre@portugalete.uned.es](mailto:jaguirre@portugalete.uned.es).

## ENUNCIADOS

**Nota.** Por su naturaleza, hay un cierto solapamiento entre los problemas de continuidad y los de Cálculo Diferencial. Se han incluido los que pueden resolverse usando los conceptos de límite y continuidad, aunque admitan resoluciones alternativas (por ejemplo usando la regla de L'Hôpital).

1 Sea  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ , entonces:

- a)  $A = 2/3$ .
- b)  $A = 1/2$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

2 Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0, \\ x \operatorname{Ln}(1+x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

- a) La función  $f$  no es continua.
- b) La función  $f$  es derivable en  $x = 0$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

3 Sea  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ .

- a) La función  $f$  tiene una asíntota vertical y una oblicua.
- b) La función  $f$  sólo tiene una asíntota vertical.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

4 Sea  $G$  la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ .

- a)  $G$  posee una recta asíntota horizontal.
- b)  $G$  posee una única recta asíntota.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

5 Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- a) Si  $\alpha = 0$  entonces la función  $f$  es continua por la izquierda en  $x = 0$ .
- b) Si  $\alpha = 2$  entonces la función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

**6** Consideremos las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0, \\ |x - 4| & \text{si } x > 0. \end{cases}$

- La función compuesta  $f \circ g$  es continua en  $x = 0$ .
- La función compuesta  $g \circ f$  es continua en  $x = 0$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**7** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0, \\ \lambda & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- La función  $f$  no es continua en  $x = 0$ , cualquiera que sea el número real  $\lambda$ .
- La función  $f$  es continua en  $x = 0$  si  $\lambda = 1$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**8** Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , si  $a = -\frac{3}{2}$  y  $b = \frac{3}{2}$ .
- $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , si  $a = \frac{3}{2}$  y  $b = -\frac{3}{2}$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**9** El valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right]$  es:

- 1
- 5
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**10** Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La función definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 + \lambda x & \text{si } x \leq 1, \\ \lambda x^2 - \lambda x^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

- Es continua en  $\mathbb{R}$ , sólo si  $\lambda = -2$ .
- Es continua en  $\mathbb{R}$ , para todo  $\lambda > 0$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**11** El valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}$  es:

- 1.
- $\infty$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**12** Sea  $f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{Ln} x & \text{si } x > 1, \\ x^2 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$

- Existe  $c \in (1, e^2)$  tal que  $f(c) = \frac{\pi}{2}$ .
- $f$  no es continua en todo  $\mathbb{R}$ .
- Ninguna de las anteriores respuestas.

**13** Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \\ \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1, \end{cases}$  se tiene:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .
- b) No existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

**14** Dada la función  $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$  si  $x > 0$  y  $x \neq 1$ , el valor de  $f(1)$  para que  $f$  sea continua en  $(0, \infty)$  es:

- a) 1.
- b)  $e$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

**15** Dada la función  $x(1 + \operatorname{sen} x)$  se tiene:

- a)  $f$  nunca toma el valor 1.
- b)  $f$  toma el valor 2.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

**16** La función  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ x + 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

- a) Es continua en el punto  $x = 2$  y no es derivable en dicho punto.
- b) Es derivable en el punto  $x = 2$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

**17** Dada la función  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } x < 1, \\ \lambda & \text{si } x = 1, \\ \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1, \end{cases}$  se tiene:

- a)  $f$  es continua si  $\lambda = \frac{3}{2}$ .
- b)  $f$  es continua si  $\lambda = 0$ .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

# SOLUCIONES

## 1 La respuesta correcta es b)

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} = \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3}.$$

También puede resolverse usando la regla de L'Hopital dos veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{12x^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 2 La respuesta correcta es b)

El único punto donde la función puede ser discontinua es  $x = 0$ , pero se ve inmediatamente que los límites por la derecha y por la izquierda de  $f$  en  $x = 0$  valen cero, que es precisamente  $f(0)$ . Veamos que es derivable en cero. Para ello usaremos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Cuando  $x$  se acerca a cero por la derecha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{Ln}(1+x)}{x} = 0.$$

Cuando lo hace por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = 0.$$

Por lo tanto  $f$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = 0$ .

## 3 La respuesta correcta es a)

La gráfica de  $f$  tiene claramente una asíntota vertical en  $x = -1$ . Para ver si tiene asíntotas oblicuas calculamos

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x)^2} = 1,$$

y

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(1+x)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 2x^2}{(1+x)^2} = -2.$$

Por lo tanto la recta  $y = x - 2$  es una asíntota oblicua.

## 4 La respuesta correcta es b)

Es claro que  $G$  tiene una asíntota vertical en  $x = 2$ . No tiene asíntota horizontal pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \pm\infty.$$

Tampoco hay asíntotas oblicuas, pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = 0.$$



**5** La respuesta correcta es c)

Si  $x > 0$ , entonces  $f(x) = 0$ , mientras que si  $x < 0$ , entonces  $f(x) = 2$ . Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2.$$

La función  $f$  no es continua en todo  $\mathbb{R}$  para ningún valor de  $\alpha$ . Como  $f(0) = \alpha$ , es continua por la izquierda si y sólo si  $\alpha = 2$ .



**6** La respuesta correcta es a)

La función  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , mientras que como se ve fácilmente  $g$  es discontinua en  $x = 0$ . Sin embargo, eso no nos dice nada respecto de  $f \circ g$  ó de  $g \circ f$ . por ello las calculamos explícitamente:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 16 & \text{si } x \leq 0, \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad g \circ f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x = 0, \\ |x^2 - 4| & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Calculando los límites laterales se ve inmediatamente que  $f \circ g$  es continua en  $x = 0$ , mientras que  $g \circ f$  es discontinua en  $x = 0$ .



**7** La respuesta correcta es a)

$f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = 0$ . Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda, teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Por lo tanto  $f$  no es continua en  $x = 0$  para ningún  $\lambda = 0$ .



**8** La respuesta correcta es a)

$f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo quizás en  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ . Calculamos los límites laterales en esos puntos.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} -3 \sin x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (a \sin x + b) = -a + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (a \sin x + b) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0.$$

Para que  $f$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$  debe ser

$$-a + b = 3 \quad \text{y} \quad a + b = 0 \implies a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{2}.$$



9 La respuesta correcta es a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x} = 3 - 2 = 1.$$



10 La respuesta correcta es a)

$f$  es continua en  $\mathbb{R}$  salvo posiblemente en  $x = 1$ . Para que sea continua en  $x = 1$ , los límites laterales cuando  $x \rightarrow 1$  deben existir y ser iguales a  $f(1) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x^3 + \lambda x) = 2 + \lambda, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda x^2 - \lambda x^3 = 0.$$

Por lo tanto  $f$  es continua en  $x = 1$  si y sólo si  $\lambda = -2$ .



11 La respuesta correcta es c)

Es una indeterminación  $\infty - \infty$ . Multiplicamos y dividimos por la misma expresión pero con signo + en vez de -:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x}}} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$



12 La respuesta correcta es a)

La función  $f$  es continua en  $(-\infty, 1)$  y  $(1, \infty)$ . Para ver si es continua en  $x = 1$  calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + \ln x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1.$$

Ambos son iguales y coinciden con el valor de  $f$  en  $x = 1$ , por lo que  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ . Por otra parte

$$f(1) = 1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad f(e^2) = e^2 + 2 > \frac{\pi}{2}.$$

Por el teorema de los valores intermedios existe  $c \in (1, e^2)$  tal que  $f(c) = \frac{\pi}{2}$ .



**13** La respuesta correcta es c)

Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda, y comprobamos que son iguales pero distintos de cero.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

El último paso puede hacerse también usando la regla de L'Hôpital.

**14** La respuesta correcta es b)

$f$  es continua en todo  $(0, \infty)$  excepto en  $x = 1$ , donde no está definida. Para que sea continua también en  $x = 1$  debe definirse  $f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , si ese límite existe. Podemos calcularlo haciendo el cambio  $x - 1 = t$ , lo que nos lleva a un límite del tipo *número e*.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

También podemos tomar logaritmos, obteniendo un límite al que se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Ln} x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e.$$

**15** La respuesta correcta es b)

La función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Para ver si toma un cierto valor, por ejemplo 1, buscamos  $a$  y  $b$  tales que  $f(a) < 1$  y  $f(b) > 1$ . En este caso, entre las muchas elecciones posibles, podemos tomar  $a = 0$  y  $b = \pi$ . Se tiene

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(\pi) = \pi = 3,141592\dots$$

Por lo tanto,  $f$  toma todos los valores entre 0 y  $\pi$ , en particular 1 y 2.

**16** La respuesta correcta es c)

Calculamos los límites laterales en  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 + 2x + 2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3.$$

Como son distintos,  $f$  no es continua en  $x = 2$ , y por lo tanto tampoco es derivable en ese punto.

**17** La respuesta correcta es a)

La función  $f$  es continua en  $(0, 1) \cup (1, \infty)$ . El único punto donde puede no ser continua es  $x = 1$ . Calculamos los límites laterales en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \lambda x^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \lambda;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

Si  $\lambda = \frac{3}{2}$ , entonces los dos límites son iguales y coinciden con  $f(1)$ , por lo que la función es continua en ese caso.